Alejandro Díaz
adiaz@itba.edu.ar

Guía de actividades N°0
Preliminares de Cálculo Numérico y Mecánica Celeste

1 Nociones de Métodos Numéricos

En los distintos campos de la física tanto teórica como experimental, es muy común encontrar problemas mateámticos que no admiten una solución analítica, expresable simbolicamente. En dichos casos resulta necesario obtener soluciones aproximadas mediante algorítmos numéricos.

Por ejemplo, el tiempo de caida T de una partícula de masa m que inicialmente se encontraba en reposo a una altura h sometida a la acción de la gravedad y de una fuerza viscosa $\mathbf{f}_{vis} = -\beta\mathbf{v}$ donde β es una constante positiva satisface la ecuación:

$$h = \frac{mg}{\beta}\left[\frac{m}{\beta}\left(e^{-\frac{\beta}{m}T} - 1\right) + T\right]$$

la cual es no–lineal en T y por lo tanto hay que resolverla en forma aproximada.

Otro problema que no admite solución *cerrada* es el problema de valor inicial correspondiente a las oscilaciones de un péndulo de longitud L bajo la acción de la gravedad:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

para cualquier condición inicial $\theta(0)$, $d\theta/dt(0)$.

A continuación se muestran distintos algoritmos numéricos, apropiados para el cómputo con calculadora de mesa como con computadora personal.

1.1 Resolución de ecuaciones no lineales

Si se quiere resolver la solución de la ecuación $f(x) = 0$, con una precisión determinada. Para ello hay varios métodos. Entre estos se mostrarán: 1) *Metodo de Iteración Funcional*, 2) *Método de Bisección* y 3) *Método de Newton*.

1.1.1 Método de Iteración Funcional

Se desea resolver la ecuación $f(x) = 0$. Para ello, escribimos esta ecuación explicitando x (de alguna forma conveniente) de la forma $x = \phi(x)$ (Nótese que para una única relación $f(x) = 0$ existen varias funciones $\phi(x)$).

Conociendo una aproximación inicial a la raíz x_0 (tambén se lo llama *valor de adivinación* o *semilla*), es posible generar la sucesión $x_1 = \phi(x_0), x_2 = \phi(x_1), x_3 = \phi(x_2), \ldots, x_{n+1} = \phi(x_n), \ldots$.

Si la sucesión generada a partir x_0 mediante el algoritmo:

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

converge, entonces lo hará a una raíz de $x - \phi(x) = 0$, es decir, a una raíz de $f(x) = 0$.

Como ejemplo, propongámonos resolver la ecuación $x - e^{-\frac{x}{10}} = 0$, tomando como aproximación inicial $x_0 = 0.5$. Despejando x de la forma:

$$x = e^{-0.1x}$$

n	x_n	$x_{n+1} = \phi(x_n)$
0	0.5	0.95123
1	0.95123	**0.9**0926
2	0.90926	**0.91**309
3	0.91309	**0.91**274
4	0.91274	**0.91274**
5	0.91274	**0.91274**

Table 1:
Primeras 5 iteraciones del proceso $x_{n+1} = e^{-0.1x_n}$ a partir de $x_0 = 0.5$.

resulta que $\phi(x) = e^{-0.1x}$. El procedimiento iterativo se dá como resultado la aproximación a la raíz, se lo muestra la tabla 1.

A partir de la segunda iteración queda asegurada la aproximación a la raíz con una cifra decimal exacta y con cinco iteraciones ya quedan aseguradas las cinco primeras cifras decimales. Por lo tanto, $x = 0.91274$ con un error menor a 10^{-5}.

Puede demostrase que para que el procedimiento $x_{n+1} = \phi(x_n)$ converja a la raíz a partir de x_0, debe cumplirse que $|\phi(x)| < 1$ para todo x en un entorno de la raíz que contenga a x_0.

1.1.2 Método de Bisección

Este es un método que por su construcción siempre converge. Si se sabe que hay al menos una raíz de la función $f(x)$ para $x \in [a, b]$, entonces se comple que $f(a)f(b) < 1$. Se toma como primera aproximación a la raiz en punto medio del intervalo: $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Luego se verifica en cuál de los dos intervalos queda la raíz: (a, x_1) o (x_1, b) y en el que la contenga se repite el procedimeinto. Así se itera hasta alcanzar la precisión deseada.

Ejemplo: Resolver $x \sin x - 1 = 0$, sabiendo que hay una raíz real en $(0, 2)$.
Verificando en cada paso en cual de los subintervalos queda la raíz confome vamos computando el punto medio, se obtiene lo que muestra la Tabla 2

n	Extremo izq. a_n	Pto.medio $x_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$	Extremo der. b_n
0	0	1.0	2
1	1.0	1.5	2
2	1.00	1.25	1.50
3	1.000	1.125	1.250
4	1.0000	1.0625	1.1250
5	1.06250	1.09375	1.12500
6	1.093750	1.109375	1.125000
7	1.1093750	**1.1**171875	1.1250000
8	1.10937500	**1.11**328125	1.11718750
⋮	⋮	⋮	⋮

Table 2:
Salida del Método de bisección para 8 iteraciones.

Hay que observar que la convergencia es más lenta, pero de todos modos, es segura. Entonces la raíz es 1.11 con sus dos cifras decimales exactas (con más iteraciones se podría obtener 1.114157141 con todas su cifras decimales exactas).

1.1.3 Método de Newton

Para resolver la ecuación $f(x) = 0$, el Método de Newton se basa en modelar linealmente a la función $f(x)$ a partir de un punto dado x_0 el cual es una aproximación inicial:

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

Una aproximación a la raíz de $f(x)$ es la raíz del modelo lineal:

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0$$

de donde ontendríamos: $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$.
Esto podría dar lugar al proceso iterativo:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, \ldots$$

partiendo de un valor inicial x_0.
Ejemplo: Para resolver $f(x) = x \sin x - 1 = 0$, a partir de $x_0 = 1$, calculamos $f'(x) = \sin x + x \cos x$ y el algoritmo resulta:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n \sin x_n - 1}{\sin x_n + x_n \cos x_n}, \qquad n = 0, 1, \ldots \quad x_0 = 1$$

Los resultados de las iteraciones se presentan en la Tabla 3. Allí puede verse lo velóz que es el método de newton en cuanto a su convergencia. En solamanete cinco iteraciones se obtiene la raíz con 8 cifras decimales exactas.

n	x_n
0	1
1	**1**.11472867
2	**1.11**415713
3	**1.1141571**4
4	**1.11415714**
5	**1.11415714**

Table 3:
Iteraciones del Método de Newton.

Puede demostrarse que si se elige x_0 en un entorno de la raíz, el Método de Newton converge si para todo x de ese entorno, se cumple:

$$\frac{|f(x)f''(x)|}{|f'(x)|^2} < 1$$

1.1.4 Ejercitación

1. Obtener la menor raíz positiva de la ecuación $\sin x - 0.3e^x = 0$, por los métodos vistos. Para ello busque graficamente el valor inicial de aproximación y -para el método de bisección- el intervalo que contenga a la raíz. Sería genial que implemete un programa de computradora para la resolución o la lleve a cabo con una planilla electrónica.

2. En un recipiente a $T = 215°\mathrm{K}$ hay $1\mathrm{kg}$ de CO a una presión $P = 70\mathrm{bar}$. Calcule el volumen específico v del gas sabiendo que la ecuación de los gases no ideales es la ecuación de Van der Waals:
$$P + \frac{a^2}{v^2}(v - b) = RT$$
donde $R = 0.08314\mathrm{bar\ m^3kg^{-1}mol^{-1}K^{-1}}$, $a = 1.463\mathrm{bar\ m^6kg^{-2}mol^{-2}}$ y $b = 0.0394\mathrm{m^3kg^{-1}}$. Comparar con el obtenido si usa la ecuación de gases ideales $Pv = RT$.

1.2 Problemas de valor inicial

Un problema de valor inicial (o su acrónimo ingés IVP) consiste en hallar el vector solución $x(t) \in \mathcal{R}^n$ que satisface:

$$x' = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

donde $f : \mathcal{R} \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ es conocida y $t_0 \in \mathcal{R}$

Por ejemplo, para un oscilador lineal cuya ecuación de movimiento es $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, se define $x_1(t) = x(t)$ y $x_2(t) = \dot{x}(t)$. Entoces, derivando las nuevas variables: $x_1'(t) = x'(t) = x_2(t)$ y $x_2'(t) = x'' = -\omega x(t) = -\omega x_1(t)$. Resulta entonces:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\omega^2 x_1 \end{pmatrix}$$

Existe una amplia gama de métodos para resolver de forma aproximada problemas de valor inicial. Nosotros veremos: 1) Método de Euler, 2) Método de Heun y 3) Método de Runge-Kutta de orden 4.

1.2.1 Método de Euler

Es el más simple de todos los métodos y de muy fácil implementación en computadora.
Dado un valor inicial $x(t_0)$ se estima $x(t_0 + h)$, donde h es un intervalo prefijado. Si el *paso de integración* h es "suficientemente pequeño", se puede considerar que la derivada de $x(t)$ se mantiene aproximadamente constante en el intervalo $[t_0, t_0 + h]$, de modo que $x'(t) \approx x'(t_0) = f(t_0, x_0)$.

De esa forma, resulta la aproximación:

$$x(t_0 + h) \approx x(t_0) + hf(t_0, x_0)$$

Siguiendo repetidamente el mismo esquema, podemos calcular aproximaciones de :$x(t_0+2h)$, $x(t_0+3h)$, etc.

De esta forma, se generar la regla recursiva:

n	t $[s]$	v $[\frac{m}{s}]$
0	0.0	0.000000000
1	0.5	−5.000000000
2	1.0	−8.750000000
3	1.5	−0.115625000
4	2.0	−0.136718750
5	2.5	−0.152539062
6	3.0	−0.164404297
7	3.5	−0.173303223
8	4.0	−0.179977417
9	4.5	−0.184983063
10	5.0	−0.188737297

Table 4: Método de Euler.

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) \qquad n = 0, 1, \ldots$$

a partir de la condición inicial $x(t_0) = x_0$. Así se obtienen aproximaciones $x_n \approx x(t_n)$ donde los puntos t_n se calculan como $t_{n+1} = t_n + h$.

Ejemplo: En un sistema de coordenadas donde el eje y está dirigido hacia arriba, la Segunda Ley de Newton aplicada a una masa $m = 0.5\text{kg}$ que cae en un medio viscoso que le produce una fuerza de roce $\mathbf{f} = -0.25\text{Nsm}^{-1}\mathbf{v}$ y aceleración de la gravedad $g = 10\text{ms}^{-2}$, da lugar a:

$$0.5\frac{dv}{dt} = -5 - 0.25v$$

Nos proponemos obtener la velocidad si $v(0) = 0$.

Para integrarla numericamente se despeja la aceleración dv/dt.

$$\frac{dv}{dt} = -10 - 0.5v$$

Aplicando el algoritmo de Euler, generamos valores de velocidad asi:

$$v_{n+1} = v_n + h(-10 - 0.5v_n), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

sabiendo que $v_0 = 0$. Eligiendo $h = 0.5\text{s}$, los valores del tiempo se generan $t_{n+1} = t_n + h$, $n = 0, 1, \ldots$. Entonces se tienen los resultados que se muestran en la Tabla 4 hasta los primeros 5 segundos de caida. En la figura 1 se muestra como varía la velocidad.

1.2.2 Método de Heun

En el Método de Euler, se supone que $x(t)$ varía a una velocidad constante en el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$ igual a $x'(t_n)$, es decir a la *velocidad* al inicio del intervalo.

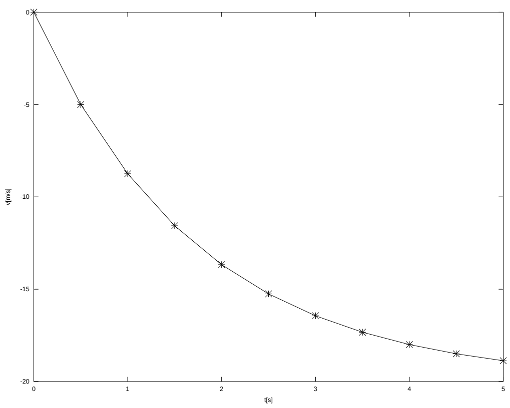

Figure 1: Velocidad en función del tiempo obtenida mediante el método de Euler. Con * se indican las aproximaciones.

Una mejora a este método es suponer que la *velocidad* de variación de x en el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$ es el promedio de las derivadas en los extremos, es decir:

$$x(t_{n+1}) \approx x(t_n) + h\left(\frac{x'(t_n) + x'(t_{n+1})}{2}\right)$$

Teniendo en cuenta que $x' = f(t, x)$, entonces puede armarse la recurrencia:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})\right]$$

Este es un esquema implícito, ya que es necesario conocer x_{n+1} para evaluar $f(t_{n+1}, x_{n+1})$. Una forma de salvar esta situación es introduciendo un esquema *predictor–corrector*. De esta forma se predice con una aproximación de Euler $\hat{x}_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$ y luego se la corrige con la aproximación de Heun. El algoritmo descripto resulta:

$$\begin{aligned} \text{Predictor}: \quad & \hat{x}_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) \\ \text{Corrector}: \quad & x_{n+1} = x_n + \tfrac{h}{2}\left[f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, \hat{x}_{n+1})\right] \end{aligned}$$

Ejemplo: Resolvamos la ecuación diferencial que describe el movimiento de un péndulo cuyas condiciones iniciales son: $\theta(0) = \pi/3 (= 60°)$ y parte del reposo.
Si la longitud del hilo es $1\mathrm{m}$ y tomando el valor de la aceleración de la gravedad igual a $10\mathrm{ms}^{-2}$, entonces se tiene:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 10\sin\theta = 0$$

Definiendo las variables $x_1(t) = \theta(t)$ y $x_2(t) = \theta'(t)$, entonces la ecuación de movimiento de segundo orden se convierte en dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2 \\ x_2'(t) &= -10\sin x_1(t) \end{aligned}$$

Eligiendo $h = 0.1$ como paso de integración [1], los valores de t_n se calculan: $t_{n+1} = t_h + h$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$ a partir de $t_0 = 0$. El algorítmo de Heun para el péndulo resulta:

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_{1n+1} &= x_{1n} + hx_{2n} \\
\hat{x}_{2n+1} &= x_{2n} + h(-10 \sin x_{1n}) \\
x_{1n+1} &= x_{1n} + \frac{h}{2} \left[x_{2n} + \hat{x}_{2n+1} \right] \\
x_{2n+1} &= x_{2n} - 10\frac{h}{2} \left[\sin x_{1n} + \sin \hat{x}_{2n+1} \right]
\end{aligned}
$$

para $n = 0, 1, \ldots$, con las condiciones iniciales $x_0^1 = \pi/3$ y $x_0^2 = 0$.

En la figura 2 se muestra un código MATLAB (o Octave) que implementa el método de Heun para el péndulo y en la figura 3 se muestra la gráfica de la solución $\theta = x^1$

```
x1 = 3.1415926535898/3;
x2 = 0.0;
t  = 0.0;
h  = 0.1;
for i=1:50
   t = t + h;
   x1_p = x1 + h* x2;
   x2_p = x2 + h*(-10*sin(x1));
   x1_c = x1 + 0.5*h*(x2 + x2_p);
   x2_c = x2 + 0.5*h*(-10)*(sin(x1)+sin(x1_p));
   printf('%f %f %f\n',t,x1_c,x2_c);
   x1 = x1_c;
   x2 = x2_c;
end
```

Figure 2: Código MATLAB que resuelve el problema del péndulo mediante el método de Heun

1.2.3 Método de Runge–Kutta de orden 4

Es uno de los métodos mas populares de resolución de ecuaciones diferenciales con valor inicial. Si bien la complejidad del algoritmo es relativamente alta, la precisión que este tiene bien vale su implementación y uso en determinados problemas.

A continuación damos el algorítmo de integración de Runge–Kutta de cuarto orden:

[1] Hay que tener en cuenta que el movimiento es periódico y por lo tanto es necesario tomar h mucho menor a la escala característica de tiempo del sistema físico, en este caso el período.

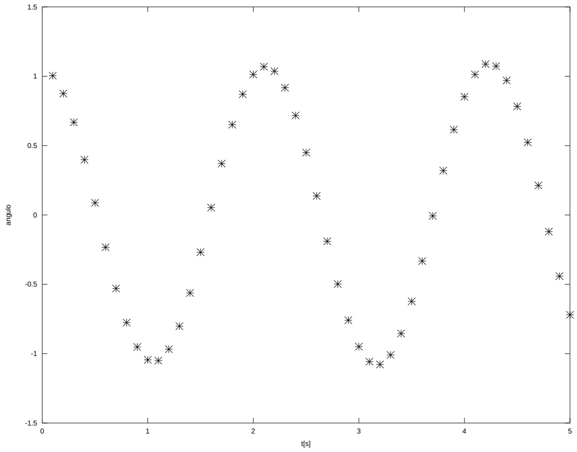

Figure 3: Solución del problema $\ddot{\theta} + 10 \sin\theta = 0$, con $\theta(0) = \pi/3$ y $\dot{\theta} = 0$ mediante el método de Heun.

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_n, x_n) \\
k_2 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}) \\
k_3 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}) \\
k_4 &= hf(t_n + h, x_n + k_3) \\
\\
x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

Ejemplo: Las ecuaciones de movimiento de un cuerpo que orbita alrededor del Sol, puden obtenerse a partir de la Segunda Ley de Newton cuando la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es la fuerza de atracción gravitatoria [1].

En un sistema de coordenadas heliocéntrico, el cual supondremos inercial, las ecuaciones de movimiento de un pequño objeto celeste son:

$$\begin{aligned}
a_x &= -G\frac{Mx}{r^3} \\
a_y &= -G\frac{My}{r^3} \\
r &= \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

donde $G = 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{N\,m^2kg^{-2}}$ es la constante de gravitación universal, $M = 1.99 \times 10^{30}\mathrm{kg}$ la masa del Sol, x, y las coordenadas cartesianas del cuerpo orbitante [2], a_x y a_y las componentes de la aceleración y r la distancia del cuerpo celeste al centro del Sol (origen de coordenadas).

[1] No vamos se considera en este ejemplo la fuerzas de perturbación gravitatoria que ejercen otros cuerpos, la fuerza debido a la presión de radiación solar y la fuerza de fricción debido a la presencia de polvo y gas interestelar que rodea al Sol.

[2] Debe tenerse en cuenta que el movimiento orbital es plano, por lo tanto se puede elegir un sistema de coordenadas heliocéntrico de modo que $z = 0$.

Haciendo el cambio de variables $x_1 = x$, $x_2 = v_x$, $x_3 = y$ y $x_4 = v_y$ las ecuaciones de movimiento pueden escribirse asi:

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_2 \\
x_2' &= -G\frac{Mx_1}{r^3} \\
x_3' &= x_4 \\
x_4' &= -G\frac{Mx_3}{r^3} \\
r &= \left(x_1^2 + y_3^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

donde se utiliza $'$ para representar d/dt.

Como condiciones iniciales se considera $x_1(0) = 1\mathrm{AU}^3$, $x_4(0) = 3.1415927\mathrm{AU}\,\mathrm{yr}^{-1}$, $x_3(0) = 0$ y $x_4(0) = 0$ y paso de integración $h = 0.001\mathrm{yr} = 0.365\mathrm{dia}$.

Si bien los cómputos pueden hacerse a mano, con lápiz y papel, usando una calculadora de escritorio, mejor es implementar un programa en computadora para que lleve a cabo los cálculos. De esa forma, se podrá "jugar" con las condiciones iniciales, parámetros etc. Puede utilizarse cualquier lenguaje de alto o bajo nivel como FORTRAN, Visual BASIC, C o C++. También puede usarse un lenguaje interprete como MATLAB, Octave o Scilab. O bien, puede implementrase el cómputo en una planilla de cálculo como GNUMERIC o MS–Excell.

En la figura 4 se muestra la órbita simulada a lo largo de 0.42 años.

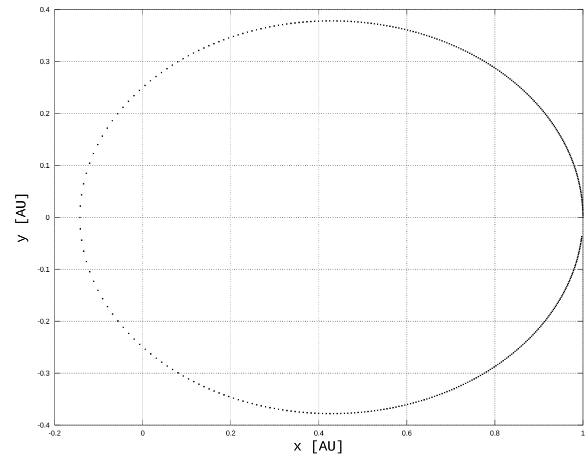

Figure 4: Movimiento planetario alrededor del Sol simulado mediante el Método de Runge–Kutta de orden 4

1.2.4 Ejercitación

1. Resuelva la descarga en un circuito RC serie con un condensador de $C = 5\mathrm{pF}$ y una resistencia $R = 2\mathrm{k}\Omega$. Inicialmente el condensador tiene una carga de $0.5\mathrm{nC}$ y no circula corriente. Utilizar el método de Euler y verificar a partir de la simulación que en un tiempo RC el capacitor alcanza el 36% de la carga inicial.

[3] La AU (Astronomical Unit es igual a la distancia media Tierra–Sol, $1\mathrm{AU} = 1.496\times^{11}$ m.

2. Una masa de 1kg esta sujeta a un resorte de constante elástica de 4Nm. Inicialmente, la masa está a 0.2m del origen y en reposo. Simular el sistema a lo largo de dos períodos usando el método de Euler. Graficar x versus t. Comentar el gŕafico. Note que el método calcula tando x como v_x. Grafique la energía $E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2$ versus t. Comente el gráfico y explique que ocurre. Repita todo con el Método de Heun. Comente. Repita todo con Runge–Kutta de orden 4.

2 Gravitación y Mecánica Celeste

La Mecánica Celeste estudia el movimiento de los cuerpos celestes. Su principal objetivo es predecir el movimiento de los planetas y sus satélites, planetoides, satélites artificiales y naves espaciales. Si bien los trabajos de Kepler permitieron su desarrollo, fue después de los trabajos de Isaac Newton que se entendió el origen de la principal fuerza actuante en los sistemas celestes, dada por la *Ley de Gravitación Universal*. Gracias a Newton, también se entendió cuantitativamente las leyes de la dinámica y las primeras herramientas para su desarrollo: el cálculo diferencial. Matemáticos y astrónomos siguieron desarrollando la Mecánica Celeste hasta nuestros días. Nombres como Legendre, Lagrange, Laplace, Gauss y en el s.XX Poincare son algunos que realizaron grandes aportes a la Mecánica Celeste con alcance tanto en la matemática como en la física.

2.1 Ejercitación

1. Los satélites artifciales *geoestacionarios* son aquellos que mantienen siempre la misma posición respecto a un observador en la superficie terrestre (es decir, sus coordenadas celestes locales no cambian con el tiempo).

   (a) Decir cuáles deben ser las características (plano, semieje y forma) de una órbita pare esta clase de satélites.

   (b) Computar el período, velocidad y altura sobre el nivel del mar de un satélite geoestacionario.

   (c) ¿Hay áreas sobre la superficie de la Tierra que no pueden ser vistas por un satélite geoestacionario? Si es así, compute la fracción de la superficie total.

   (d) ¿Conoce algún satélite geoestacionario sobre el territorio argentino?

   Sugerencia: Modele a la Tierra como una esfera homogénea de masa $M_\oplus = 5.974 \times 10^{24}\mathrm{kg}$ y radio $R_\oplus = 6378137\mathrm{m}$.

2. *Velocidad de Escape* es la mínima velocidad inicial necesaria que debe tener una partícula para alcanzar una distancia infinitamente lejana (donde se desprecie la atracción gravitatoria) desde la superficie de un planeta de masa M y radio R.
   Esta definición asume que la masa m de la partícula cumple $m \ll M$ el planeta tiene simetría esférica.

   (a) Obtener una expresión de la *velocidad de escape* v_e.
   Sugerencia: Forma 1: Utilizar el terorema de conservación de la energía.
   Forma 2: Utilizar la Ley de Gravitación Universal para una particula que es lanzada de la superficie del planeta en forma radial, escribir la ecuación de movimiento e integrarla para relacionar la velocidad v y lla distancia al centro del planeta r. Luego aplicar la definición.

   (b) Computar la velocidad de escape para la Tierra, la Luna, Marte, Venus y Júpiter.

(c) Explicar por qué es más fácil enviar una sonda al espacio profundo (fuera del Sistema Solar) que enviar una sonda hacia el Sol. *Sugerencia:* Para salir del Sistema Solar, asumir que toda la masa está concentrada en el Sol y que parte dede la órbita terrestre.

3. (a) El radio angular del Sol vará durante el año entre los valores $15'43.8''$ y $16'15.9''$, computar la excentricidad de la órbita de la Tierra.

   (b) El diametro angular medio del Sol es $31'58.3''$. Teniendo en cuenta la duración de un año $365.2564\mathrm{d}$, estimar la densidad media del Sol unicamente con estos datos y usar el valor de la Constante de Gravitación Universal.

   (c) A partir de una tabla con características de los planetas del Sistema Solar:

      i. Calcule la densidad de cada uno de ellos.

      ii. Represente la densidad y el número de satélites descubiertos de cada uno de ellos en función de sus distancias medias al Sol. Comente los resultados obtenidos.

4. Para una órbita elíptica alrededor del Sol, se denomina *Afelio* A al punto de máximo alejamiento y *Perihelio* Π al punto de máximo acercamiento al Sol. Demostrar que la razón de velocidades entre el Afelio y el Perihelio es:

$$\frac{v_{\mathrm{A}}}{v_{\Pi}} = \frac{1-e}{1+e}$$

siendo e la excentricidad de la órbita.

Compute esta razón para la Tierra.

5. Calcular la masa del planeta Neptuno respecto a la de la Tierra $\mathfrak{M}_{♆}/\mathfrak{M}_{♁}$, conociendo que uno de sus satélites (Tritón) tiene una órbita casi circular con $a = 354800\mathrm{km}$ mientras que su período orbital es de $5\mathrm{d}21\mathrm{h}$. Realizar el cálculo comparando el movimiento de Tritón con el de la Luna alrededor de la Tierra.
Sugerencia: Considerar que la masa de Tritón es despreciable frente a la de Neptuno y que la de la Luna lo es frente a la de la Tierra.

6. Se desea enviar una nave espacial al planeta Marte. La trayectoria debe ser tal, que cuando la misma llegue, dicho planeta se encuentre en conjunción respecto a la posición que ocupaba la Tierra en el momento de partida de la nave.

   (a) Determinar la excentricidad y el semieje mayor de la órbita de la nave.

   (b) Computar la velocidad final con que llega a Marte y el tiempo que dura el viaje.

   (c) Compute en cuánto variará la "longitud ecliptical" de la Tierra y de Marte, respecto a un sistema de coordenadas heliocéntricas, entre los instantes de partida y de llegada de la nave. Hacer un dibujo indicando las órbitas de los planetas y de la nave así como las posiciones de los primeros en los instantes de partida y de llegada.

Sugerencia: Considerar que las órbitas de los planetas son circunferencias y que ambas se hallan en el plano de la eclíptica ($a_{\oplus} = 149.6 \times 10^{6}\mathrm{km}$ y $a_{♂} = 227.94 \times 10^{6}\mathrm{km}$).

Nota: A los planetas cuyas órbitas, según el modelo copernicano son interiores a la órbita terrestre se los llaman *Planetas inferiores*, mientras que aquellos cuyas órbitas son exteriores a la de la Tierra son *Planetas superiores*

Las configuraciones que pueden tener los planetas respecto del Sol y la Tierra se muestran en la figura 5 y son:
Elongación Este y Oeste: Máxima separación angular -vista desde Tierra- del planeta respecto

a la dirección al Sol (solo para planetas inferiores).
Conjunción Inferior y Superior: Alineamiento Tierra–Planeta–Sol y Tierra–Sol–Planeta respectivamente (solo para planetas inferiores) *Oposición*: Alineamiento a $180°$ respecto de la dirección al Sol (solo para planetas superiores)
Cuadratura Este y Oeste: Alineamiento a $\pm 90°$ respecto de la dirección al Sol (solo para planetas superiores)
Conjunción: Alineamiento a $0°$ respecto de la dirección al Sol (solo para planetas superiores)

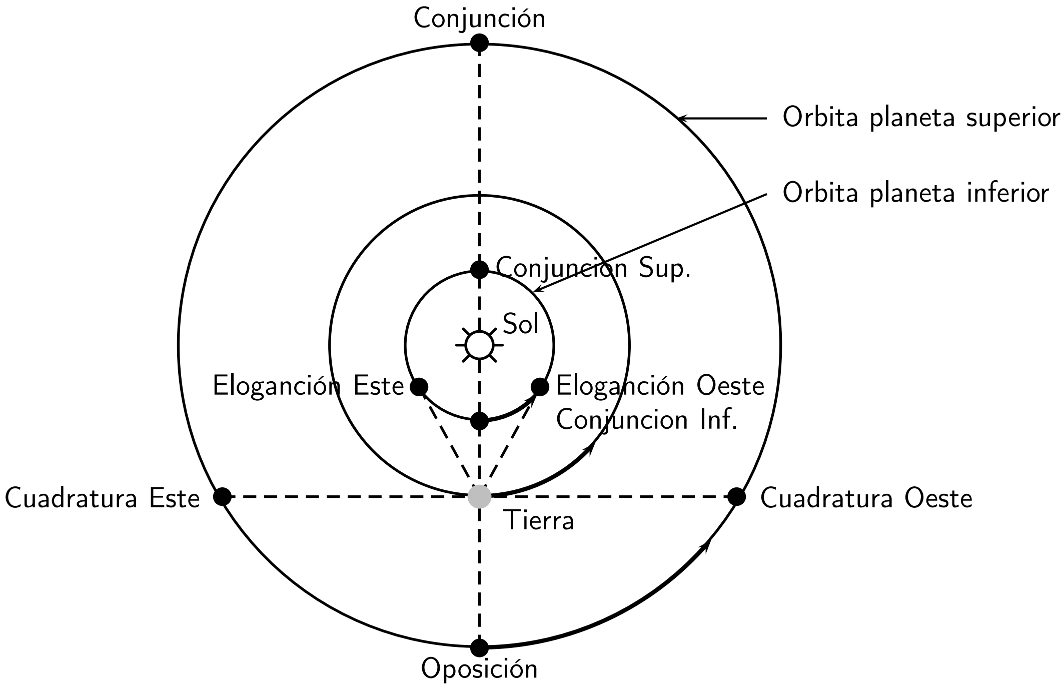

Figure 5: Configuración orbital de los planetas

7. Computar anomalía media, excentrica y verdadera de la Tierra para un cuarto de año después de haber pasado por el perihélio.

8. El cometa Halley tiene un período orbital de $76.0\mathrm{yr}$, una excentricidad orbital $e = 0.9673$.

   (a) Computar el semieje mayor de la órbita del cometa Halley.
   (b) Con los datos orbitales del cometa Halley estimar la masa del Sol.
   (c) Computar la distancia del cometa Halley al Sol en el afelio y en el perihélio.
   (d) Computar la velocidad orbital del cometa Halley en el afelio, en el perihélio y sobre el semieje menor de la órbita.
   (e) La época del último pasaje por el perihélio fue el 9 de Febrero de 1986. A que distancia del Sol se encuentra el día de hoy.

9. Un cometa de muy alejado del Sol, tiene una velocidad $\mathbf{v}_0$ cuando la trayectoria es rectilinea. La trayectoria rectilinea inicial del cometa pasa a una distancia b del Sol como lo muetra la figura 6.

   (a) Si la velocidad inicial del cometa es $v_0 = 8\mathrm{m}7\mathrm{s}$, computar la distancia entre el cometa y el Sol y la velocidad orbital del cometa en el perihelio.

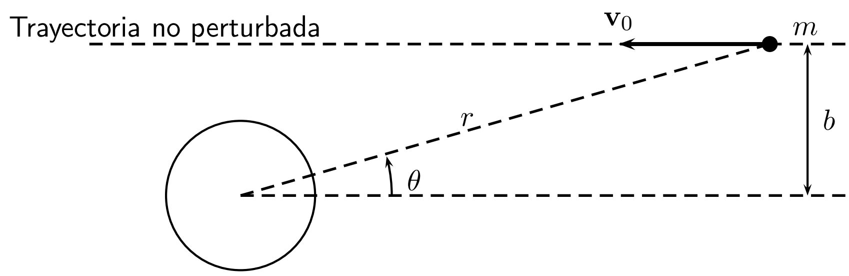

Figure 6: Problema 9

(b) Si el cometa choca con el Sol, determinar el punto de impacto usando la coordenada angular de la figura 6.

(c) Usando los datos orbitales de cometa Halley y el programa `orbit.m`, estimar el tiempo que tarda el cometa para desplazarse desde el perihelio hasta una distancia de 1AU desde el foco principal de su órbita.

10. En este problema deberá usarse el programa `orbit.m` para generar las posiciones de la Tierra y Marte de forma que:

(a) Comenzar suponiendo que la Tierra y Marte inicialmente se encuentran en oposición de forma que que estén la menor distancia mutua (afelio y perihelio respectivamente). Calcular las posiciones de ambos planetas entre dos oposiciones sucesivas de Marte. Graficar.

(b) ¿Cuánto tiempo transcurre entre dos oposiciones sucesivas?

(c) ¿Cambiaría su respuesta si hubiese realizados los cálculos empezando con la Tierra en el perihelio y Marte en el afelio?. Recompute y explique.

(d) A partir de los resultados de su experimento numérico explicar el por qué Marte parece más brillante en el cielo nocturno durante ciertas oposiciones que durante otras.

(e) La salida del programa `orbit.m` son las coordenadas cartesianas del planeta respecto del cuerpo central, en ete caso el Sol. Usando las coordenadas obtenidas de la Tierra y Marte en la parte (10a), referir el moviemiento de Marte relativo a la Tierra y graficar la órbita del planeta Marte como será vista desde la Tierra.

3 Proyectos

1. *Leyes de Kepler*

Etapa 1: Escribir un programa de computadora que resuelva el movimiento orbital de un cuerpo de masa m alrededor de un cuerpo central de masa $M \gg m$, los cuales interactúan gravitatoriamente. Utilizar el Método de Runge–Kutta de orden 4. Testear el programa con simulaciones controldas. Por ejemplo simulando el movimiento de la Tierra o Marte y verificar que resulten caracteísticas conocidas de movimiento -por ejemplo el período orbital. Además, testear que se conserve la energia.

Etapa 2: Con el programa realizado, simular los movimientos de Mercurio (☿), Venus (♀), Tierra (♁), Marte (♂), Júpiter (♃) y Saturno (♄). Graficar las órbitas, teniendo cuidado con la escala. Mostrar y explicar el movimiento retrógrado.

Etapa 3: Con las simulaciones realizadas, colegir las leyes empíricas de Kepler:

(a) Primera Ley: Verificar que las órbitas son elípticas. Para eso, verificar que las coordenadas de los planetas constituyen una elipse con foco en el Sol.

(b) Segunda Ley o Ley de Areas: A partir de las simulaciones, para cada Δt pequeño utilizado, se ha obtenido un pequeño triangulo de área ΔA. Comprobar que para todos los planetas $\Delta A/Deltat$ se mantiene constante

(c) Tercera Ley: Graficar P^2 versus a^3 y hacer un ajuste por mínimos cuadrados.

Presentar los resultados en tablas y gŕaficos.

Etapa 4: Proponer una o más actividades o ejercitaciones o experimentos para realizar tanto con su programa como con la metodología mostrada en la etapas anteriores.

Etapa 5: Escriba su investigación en un artículo que presente el formato de *paper* científico o educativo. Para eso puede compiarse de los formatos de revistas especializadas. Por ejemplo; *European Journal of Physics* (http://www.iop.org), *American Association of Physics Teacher* (http://www.aapt.org)

Etapa 5 (opcional): Presente su investigación en algún congreso de enseñanza de la física.

2. *Impacto Profundo*

Etapa 1: Escribir un programa de computadora que resuelva el movimiento orbital de un cuerpo de masa m alrededor de un cuerpo central de masa $M \gg m$, los cuales interactúan gravitatoriamente. Utilizar el Método de Runge–Kutta de orden 4. Testear el programa con simulaciones controldas. Por ejemplo simulando el movimiento de la Tierra o Marte y verificar que resulten caracteísticas conocidas de movimiento -por ejemplo el período orbital. Además, testear que se conserve la energia.

Etapa 2: Modificar el programa anterior para agregar una fuerza viscosa proporcional a la segunda potencia de la velocidad:

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2}\rho S C_D |\mathbf{v}|\mathbf{v}$$

que modele la fricción viscosa de un cuerpo de sección tranvesal S y coeficiente de frenado aerodinámico C_D, producida por un medio viscoso de densidad ρ.

Etapa 3: Con el programa escrito, simular la colisión de un meteorito (o cometa) sobre la Tierra. Para ello, suponer que el colisionador o NEO (Near Earth Object) inicialmete está muy lejos (fuera de la acción gravitatoria terrestre), moviendose a velocidad constante $\mathbf{v}_0$ con un *parámetro de impacto* b. Considerar que la atmósfera se modela isotermicamente, variando la densidad del aire ρ con la altura r como:

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\frac{r}{H}}$$

donde $\rho_0 = 1.5 \mathrm{kg\,m}^{-3}$ es la densidad del aire en la superficie de la Tierra y $H = \frac{p_0}{\rho_0 g} = 7.95 \mathrm{km}$ es la *altura de escala* de la atmósfera, donde p_0 es la presión atmosférica a nivel del mar y g la aceleración de la gravedad estándar. Como no se conoce el valor de v_0, la masa del asteroide m ni el parámetro de impacto b, habrá que realizar varias simulaciones y ver los distintos escenarios.
Cosas a tener en cuenta:

- Ver si el NEO choca o no choca contra la Tierra. Si no choca, ver a que distancia pasa.
- Si el NEO choca, indicar donde choca

Presentar gráficos y tablas. Computar la potencia disipada $Q_{dis} = -\frac{1}{2}\rho S C_D v^3$ en la atmósfera en función de la altura r para las distintas condiciones (de v_0, m y b).

Etapa 3: Analizar los efectos de *ablación*, para esto tener en cuenta que si Q es la constante de ablación térmica (cantidad de energía para que se ablacione una unidad de masa), la cual depende de la composición del meteorito, entonces la velocidad de pérdida de masa por ablación es

$$\dot{m} = \frac{Q_{dis}}{Q} = \frac{\rho S C_D v^3}{2Q}$$

Para un meteorito con densidad de $3.5\times10^3\mathrm{kg/m^3}$, puede tomarse $Q = 10\mathrm{MJ/kg}$. Graficar $\dot{m}$ en función de la altura r para los distintos casos.

Etapa 4: Proponer una o más actividades o ejercitaciones o experimentos para realizar tanto con su programa como con la metodología mostrada en la etapas anteriores.

Etapa 5: Escriba su investigación en un artículo que presente el formato de *paper* científico o educativo. Para eso puede compiarse de los formatos de revistas especializadas. Por ejemplo; *European Journal of Physics* (http://www.iop.org), *American Association of Physics Teacher* (http://www.aapt.org)

Etapa 5 (opcional): Presente su investigación en algún congreso de enseñanza de la física.